4) $\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$

a) $x_1 = f(x_0) = f(2) = \frac{3}{2}$

$x_2 = f(x_1) = f(\frac{3}{2}) = \frac{5}{3}$

$x_3 = \frac{8}{5}$; $x_4 = \frac{13}{8}$

b) par reccurence

* $U_0 = 2 \in \mathbb{Q}_+$ (vrai)

* supposons que $x_n \in \mathbb{Q}_+$ et montrons que $x_{n+1} \in \mathbb{Q}_+$

$x_{n+1} = f(x_n) = 1 + \frac{1}{x_n} \in \mathbb{Q}_+$

c) * montrons que : $x_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$; $\forall n \in \mathbb{N}$

* pour n=0 : $x_0 = 2 \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$

* supposons que : $x_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ et montrons que : $x_{n+1} \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$

$x_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \Rightarrow \frac{3}{2} \le x_n \le 2 \Rightarrow f(2) \le f(x_n) \le f(\frac{3}{2})$ (car f est décroissante)

$\Rightarrow \frac{3}{2} \le x_{n+1} \le \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{3}{2} \le x_{n+1} \le 2$

conclusion: $x_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$; $\forall n \in \mathbb{N}$

* $|x_{n+1} - \varphi| = |f(x_n) - f(\varphi)| = \left|1 + \frac{1}{x_n} - 1 - \frac{1}{\varphi}\right| = \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{\varphi}\right| = \frac{|x_n - \varphi|}{\varphi . x_n}$

comparons $\frac{1}{\varphi . x_n}$ et $\frac{4}{9}$